Uno sguardo matematico

PARTE 1 – Andamento esponenziale

"L'incendio suo seguiva ogni scintilla;
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar delli scacchi s'inmilla"
Par XXVIII, 91 - 93

La scacchiera

Cosa significa che *s'inmilla*?
Dante sta dicendo che le schiere angeliche si moltiplicano secondo una funzione esponenziale di base 1000. Facendo poi riferimento agli scacchi, Dante fa riferimento a questa leggenda:

Da un'antica novella indiana:
"… un giorno il Re fu informato che un giovane bramino, umile e povero, chiedeva di essere ricevuto. In realtà aveva già fatto questa richiesta diverse volte, ma il Re aveva sempre rifiutato, sostenendo che il suo spirito non era abbastanza forte da permettergli di ricevere visite. Tuttavia questa volta gli concesse udienza e ordinò che il giovane straniero venisse condotto al suo cospetto.
Una volta giunto alla sala del trono, il bramino fu interrogato, secondo le regole del cerimoniale, da uno dei nobili del Re."Chi sei? Da dove vieni? Cosa desideri da colui che, per volere di Visnù, è Re e signore di Taligana?". "Mi chiamo Lahur Sessa" rispose il giovane bramino," e vengo dal villaggio di Namir, a trenta giorni di cammino da questa bella città. Abbiamo avuto notizia, là dove vivo, che il nostro Re è afflitto da profondo dolore, che egli è amareggiato dalla perdita del figlio che gli fu strappato nelle vicende della guerra. "È terribile", mi sono detto, "che il nostro nobile sovrano si isoli completamente nel suo palazzo, come un cieco bramino che si abbandona alla sua pena; ho quindi pensato che sarebbe quanto mai opportuno inventare un gioco che possa distrarlo e aprire il suo cuore a nuovi piaceri. È questo l'umile dono che reco al nostro Re Iadava".(…)
Sessa mise davanti al Re una tavola divisa in sessantaquattro caselle di uguali dimensioni. Su di essa erano disposti due gruppi di pezzi, gli uni bianchi e gli altri neri. Le figure di questi pezzi erano allineate simmetricamente sulla scacchiera e vi erano strane regole che governavano i loro movimenti.(…)
Il Re Iadava fu molto interessato alle regole del gioco e si mise a far domande all'inventore: (…) Ad un certo punto il Re notò con grande sorpresa che i pezzi, dopo tutte le mosse fatte, erano spiegati esattamente come nella battaglia di Dacsina . "Osserva" gli disse allora il giovane bramino, "che, per vincere la battaglia, questo nobile guerriero deve sacrificarsi…" E gli indicò proprio il pezzo che il Re aveva posto a capo delle schiere impegnate nel cuore della lotta. Il saggio Sessa volle così mostrare che talvolta la morte di un principe è necessaria per assicurare pace e libertà al suo popolo. Udendo queste, Re Iadava esclamò…:" Dimmi allora cosa desideri tra ciò che sono in grado di darti, così potrai vedere quanto grande può essere la mia riconoscenza verso coloro che la meritano." (Sessa disse di non volere alcuna ricompensa perché questa era la felicità di aver guarito il Re.) Questi sorrise e, incapace di credere alla sincerità del giovane insistette :("Rifiutare la mia offerta sarebbe non solo una scortesia ma disobbedienza". Sessa allora per non essere scortese, chiese di essere pagato in chicchi di grano. Il Re stupito dalla strana moneta chiese in quale modo poteva ricompensarlo.)". È facilissimo" spiegò Sessa" mi darai un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, quattro per la terza, otto per la quarta e così via, raddoppiando la quantità ad ogni casella fino alla sessantaquattresima e ultima."(…)
Il re rise di questa richiesta, dicendogli che poteva avere qualunque cosa e invece si accontentava di pochi chicchi di grano. "

Si consiglia di far partecipare il visitatore ponendo alcune domande come:
E' una richiesta ragionevole?
Ha chiesto troppo poco come compenso il bramino?
Quanti chicchi di riso gli spettano?

La somma dei chicchi di riso della scacchiera è di quasi 18,5 miliardi di miliardi di chicchi.. Sono tanti, è chiaro. Ma tanti quanti? Per esempio, quanto potrebbero pesare? Ci stanno in un baule di una macchina? Serve un tir? Di meno? Di più?

Insomma, facciamo un piccolo calcolo. Stimando in 1/45 di grammo il peso medio di un chicco di riso, il peso di 2^{63} chicchi (quelli che dovrebbero trovarsi nella 64-esima casella) è di oltre 200 miliardi di tonnellate.

Considerando che la produzione mondiale di riso nel 2006 è stata di 636 milioni di tonnellate, a questo livello di produzione occorrono oltre **trecento anni** per produrre tale quantità di riso. Possiamo fare un altro confronto. Supponendo di caricare il riso in vagoni merci a quattro assi, che sono lunghi 20 metri e trasportano ciascuno 50 tonnellate, occorrerebbe un treno lungo 80 milioni di chilometri, vale a dire:

- oltre 2000 volte l'equatore terrestre;
- 210 volte la distanza media fra la terra e la luna;
- oltre la metà della distanza fra la terra e il sole.

La novella si conclude così:

"Il giorno dopo i matematici di corte andarono dal re e gli dissero che per adempiere alla richiesta del monaco non sarebbero bastati i raccolti di tutto il regno per ottocento anni. Lahur Sessa aveva voluto in questo modo insegnare al re che una richiesta apparentemente modesta poteva nascondere un costo enorme. Comunque,una volta che il re lo ebbe capito, il bramino ritirò la sua richiesta e divenne il governatore di una delle province del regno."

Una crescita di questo tipo, a cui Dante fa riferimento, è una crescita esponenziale. Facciamo un altro esempio per meglio comprendere l'andamento esponenziale:

Foglio di carta

L'idea della crescita esponenziale viene presentata anche in questo modo: quante volte si dovrebbe piegare un foglio di carta per ottenere uno spessore pari alla distanza terra – luna? Si mostrano alcuni fogli piegati e si fa notare che ogni volta che si piega il foglio lo spessore raddoppia.
Supponiamo che lo spessore originale del foglio, prima di iniziare il procedimento, sia di un decimo di millimetro. Ad esempio, dopo aver piegato il foglio 4 volte, lo spessore è di 1.6 millimetri e, in generale, all'n-esima piega sarà di 2^n decimi di millimetro, cioé $2^n/10$ millimetri. Naturalmente l'operazione è realizzabile in concreto solo per i primi passi, ma noi stiamo supponendo di poterla estendere idealmente eseguendo un numero di piegature arbitrario.

Si chiede al visitatore se lo spessore del foglio piegato per esempio 42 volte sia grande.
E' sconvolgente scoprire che piegando il foglio "solo" 42 volte, si ottiene uno spessore maggiore della distanza terra – luna.

Curiosità: Ci si potrebbe chiedere quale sia la stima dello spessore dopo cento passi cioè, in sostanza, di valutare approssimativamente la misura di 2^{100} decimi di millimetro. Il risultato è davvero incredibile: tale misura è di circa 12.7 miliardi di anni luce, cioé più o meno la distanza percorsa da un raggio di luce dal big bang a oggi!

Quindi la crescita esponenziale delle schiere angeliche a cui fa riferimento Dante indica il fatto che non solo esse crescono, ma crescono sempre più velocemente.

Realtà descrivibile mediante funzione esponenziale

La cosa impressionante è accorgersi di quanti fenomeni naturali sono descrivibili tramite leggi esponenziali. Per esempio:

- Processo mitotico (fare riferimento al pannello): Si spiega, mediante l'ausilio del pannello in cosa consiste il processo mitotico e si mostra la crescita cellulare a livello qualitativo al visitatore usando la coltura di lievito.
  OSS nel caso di domanda: Si può pensare che il lievito nei giorni aumenti perché il volume del lievito aumenta. In realtà è davvero un aumento di massa per l'aumento delle cellule.

- Note musicali (fare riferimento al pannello): la frequenza di vibrazione di una nota è funzione esponenziale dell'ottava. Usando il pc si mostra il grafico in cui, almeno qualitativamente, tutti possono comprendere che la frequenza di una nota 'aumenta molto' o 'diminuisce molto' considerando ottave diverse. In realtà l'andamento è ancora esponenziale.

Ma c'è molto altro. Sui pannelli sono anche accennati altri due esempi che, per motivi di tempo, non verranno spiegati, e sono:

- Raggi x: questo è un esempio di attenuazione esponenziale in cui il numero di fotoni che attraversa un certo spessore di materiale dipende dal fascio incidente, dallo spessore del materiale attraversato e dal tipo di materiale attraversato.

- Carica di un condensatore: Durante il processo di carica di un condensatore la corrente che inizialmente fluisce tra le due armature cala secondo una legge esponenziale.

PARTE 2 – Sezione aurea

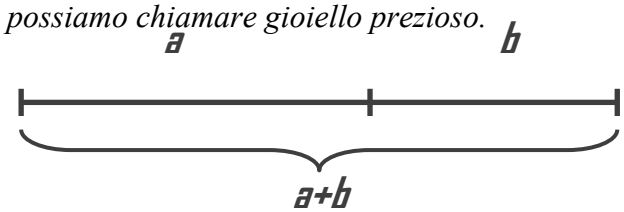
La natura è ordinata anche in altri modi:

Sezione aurea:

Da sapere, ma non da spiegare tutto.

La **sezione aurea** (Φ) è il medio proporzionale di un segmento. Essa è quindi un numero. Diceva Keplero nel 1619, nell'*Armonia del mondo*:

La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora, e l'altro la divisione del segmento in rapporto estremo e medio. Il primo lo possiamo paragonare ad un lingotto d'oro, e il secondo lo possiamo chiamare gioiello prezioso.



$(a+b) : a = a : b$

Dall'equazione di destra ricaviamo che $a = b\,\Phi$ e, per sostituzione, il nostro sistema diventa:

$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$, cioè $\frac{b(\Phi+1)}{b\Phi} = \frac{b\Phi}{b}$, e, facendo un po' di conti, si trova l'equazione di secondo grado $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, che ha come soluzioni due radici reali di cui quella *positiva*

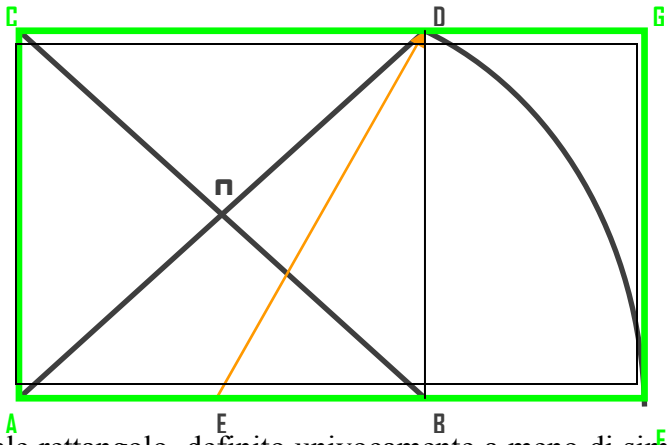
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618.....$

Tale numero venne chiamato nel III secolo a.C. da Euclide 'rapporto estremo e medio', nel 1509 da Luca Pacioli 'divina proporzione', nel 1835 da Martin Ohm 'sezione aurea', e nel 1909 da Mark Barr Φ.

Il problema di estendere un segmento dato in maniera che esso diventi la sezione aurea dell'estensione si risolve costruendo il rettangolo detto aureo:

Rettangolo aureo *(è necessario conoscere come si costruisce un rettangolo aureo per gli specchi)*

Si considera il segmento AB e si costruisce il quadrato ABCD.
Si tracciano le sue diagonali e si ottiene il suo centro in O.
Da O si abbassa la perpendicolare OE, che divide il lato AB in due.
Prolungo il lato AB dalla parte di A.
Si centra in E con raggio uguale ad ED e si traccia un arco che interseca il prolungamento di AB in F. Si determina così il rettangolo AFGC, detto aureo.

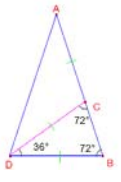


Tale rettangolo, definito univocamente a meno di similitudini o scala, è tale che il rapporto tra lato lungo e lato corto sia aureo. Il rettangolo aureo è stato considerato dagli antichi il più perfetto tra tutti i rettangoli.

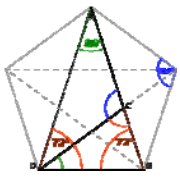
Osservazione: i dodici vertici di tre rettangoli aurei incastrati in tre dimensioni costituiscono i vertici di un iconosaedro regolare - 20 facce triangolari - (si può facilmente realizzare con tre cartoline, o tre carte di credito, la cui forma è di solito un rettangolo (quasi) aureo). Questo poliedro regolare venne costruito da Euclide negli *Elementi* in modo diverso da questo, mentre questa tecnica di costruzione venne notata da Luca Pacioli nel suo *La divina proporzione*.
NB: ricorda che i poliedri regolari sono solo cinque: tetraedro, ottaedro, icosaedro, esaedro (cubo), dodecaedro

Triangolo aureo:

In un triangolo isoscele con gli angoli alla base pari a 72° il lato e la base hanno come rapporto Φ: si dice allora che il triangolo è aureo.
Se si traccia la bisettrice di uno degli angoli alla base, si ottiene un altro triangolo isoscele dagli angoli di base di 72°. Esso è simile al triangolo originale . Il lato AB è stato diviso da C in media ed estrema ragione, si è cioè determinata la sezione aurea.
La base del triangolo più grande risulta sempre uguale al lato opposto del triangolo più piccolo.
Si instaura pertanto una proporzione continua, che possiamo cioè far proseguire all'infinito, in cui compare costantemente la sezione aurea.



La sezione aurea è anche legata al pentagono regolare in quanto la diagonale ed il lato del poligono hanno come rapporto Φ.



I centri delle facce di un dodecaedro (12 facce pentagonali) sono i vertici dei tre rettangoli aurei incentrati.

Gli specchi e l'uomo:
Costruendo il rettangolo aureo si mostra l'eventuale proporzione perfetta sul corpo umano di alcuni visitatori.
Il quadrato viene costruito utilizzando come lato l'altezza dell'ombelico. Si procede nella costruzione del rettangolo aureo sullo specchio. Se il lato lungo che ne risulterà sarà pari all'altezza del visitatore, allora egli avrà altezza uomo e altezza ombelico in rapporto aureo.

I rapporti tra le lunghezze delle falangi del dito medio e anulare sono (approssimativamente) aurei.
Così come il rapporto tra la lunghezza del braccio e l'avambraccio.
La distanza tra testa e ombelico è tagliata dalla laringe in un rapporto aureo e la distanza tra il punto della circonferenza massima della coscia e la pianta dei piedi, quando viene divisa dal ginocchio.

Se potessimo guardare ad occhio nudo il DNA di qualsiasi cellula (anche delle nostre!!) vedremmo che anche la sua doppia elica possiede proporzioni auree: facendo il rapporto tra il passo dell'elica e la sua larghezza è in buona approssimazione pari al rapporto aureo.

Si cita come punto di apertura la musica:
Nella musica
Nel caso dei violini alcuni ritengono che la piacevolezza del suono derivi dalla sapienti capacità dei liutai di costruire la sua cassa armonica secondo particolari geometrie; per esempio l'arco che ne costituisce la base avrebbe, in molti casi, il suo centro di curvatura proprio in posizione aurea rispetto la lunghezza complessiva dello strumento, inoltre anche lo stesso Stradivari si sa per certo che cercasse di posizionare gli occhielli del violino sempre in tale posizione.

PARTE 3 – numeri di Fibonacci

Spiegazione:
Leonardo Pisano, conosciuto con il nome paterno "figlio di Bonaccio" o Fibonacci è un famoso matematico pisano vissuto a cavallo del 1200. Nel suo libro più famoso, il Liber Abaci, discute in maniera esauriente metodi e problemi algebrici. Uno di questi problemi suona così:

Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno, a partire da un'unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia dà alla luce una nuova coppia che diventa produttiva a partire dal secondo mese?

Questo famoso problema dà origine alla "successione di Fibonacci":

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …F_n, …

dove $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, ossia ogni termine F_n di tale successione è la somma dei due termini precedenti F_{n-1} e F_{n-2}, considerando che i primi due termini sono $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.
Questa successione possiede numerose proprietà. Per esempio sommando due o più termini consecutivi della successione partendo dal primo e aggiungendo ulteriormente '1', si ottiene sempre un altro termine della successione di Fibonacci che nella sequenza segue di due posti l'ultimo termine della somma (es: 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 1 = 13 cioè il settimo termine della successione)
La proprietà senza dubbio più elegante è quella che esprime un legame forte tra questa successione ed il rapporto aureo: infatti il limite del rapporto *tra un termine* F_n *della successione ed il suo*

precedente F_{n-1}, per n che tende a più infinito è proprio il numero Φ! Ossia, formalizzando in linguaggio matematico: $\phi = \lim_{n \to +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$

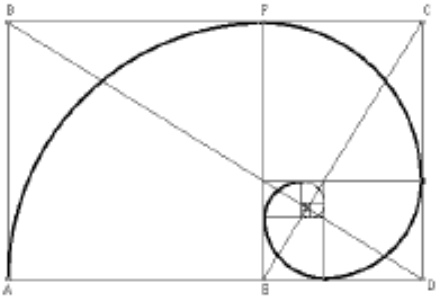
Questi numeri si ritrovano anche:

Nella musica:

Nel pianoforte, particolare rilievo viene dato alla struttura della tastiera, in special modo con parallelismi fra i numeri di questa e quelli di Fibonacci. I **tredici** tasti delle ottave, divisi in distinti in **otto** bianchi e **cinque** neri, a loro volta divisi in gruppi da **due** e **tre** tasti ciascuno.

PARTE 4 – Spirale logaritmica(*)

Spiegazione:



Intimamente legata anche ai numeri di Fibonacci è la spirale logaritmica**.** La relazione tra i numeri di Fibonacci e la spirale logaritmica si rivela evidente se si costruisce una serie di quadrati in cui il lato di ognuno di questi è dato dalla somma delle misure dei lati dei due precedenti. Se li disponiamo come in figura e tracciamo un arco di cerchio avente per raggio il lato del quadrato, la figura che si ottiene è una spirale logaritmica.

Si mostra ai visitatori la costruzione sovrapponendo i lucidi e si sottolinea il fatto che questa è un tipo particolare di spirale logaritmica, quella *aurea* o *armonica*, che più di tutte ha affascinato gli studiosi.

Una *spirale logaritmica*, detta anche *spirale equiangolare, spirale proporzionale* o *spirale di crescita* o *spirale meravigliosa*, come venne chiamata da Bernoulli, è un tipo particolare di spirale che frequentemente ci capita di osservare nella nostra vita quotidiana.

Alcune proprietà e brevi cenni storici *(da sapere ma non da spiegare, per eventuali domande)*

La spirale logaritmica fu studiata per la prima volta nel 1638 da **René Descartes** (1596– 1650), conosciuto in Italia come Cartesio; egli disse: "è detta spirale logaritmica ogni figura piana che proceda da un punto fisso tale che l'area vettoriale di qualsiasi settore sia sempre una proporzione aggiunta della figura precedente".
In seguito il matematico svizzero **Jakob Bernoulli** (1654 – 1705) definì la curva *Spira mirabilis,* vale a dire *Spirale meravigliosa*, disponendo che essa fosse scolpita sulla sua tomba accanto alla frase *Eadem mutata resurgo,* ovvero *sebbene cambiata, rinasco identica*.

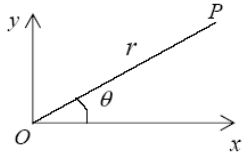
La spirale logaritmica è la traiettoria di un punto che si muove di moto uniformemente accelerato su una semiretta, la quale ruota uniformemente intorno alla sua origine.
La spirale proporzionale non raggiunge mai il polo, poiché il centro della spirale è un punto *asintotico*: mano che si avvicina al polo, la curva ci si avvolge intorno senza mai raggiungerlo. Se volessimo osservare il centro della spirale logaritmica con un microscopio o con una lente di ingrandimento questo ci apparirebbe esattamente come la spirale che si vedrebbe continuando la

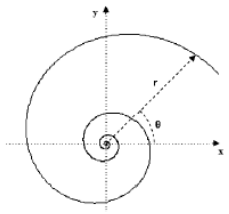
curva nel verso opposto. Allo stesso modo allontanandosi sempre di più dall'origine aumentano le dimensioni della spirale, ma essa è sempre somigliante a se stessa. Ruotando si mantiene sempre simile a se stessa, ma allo stesso tempo va allargandosi e distendendosi all'infinito. L'aggettivo "meravigliosa" di Bernoulli si riferisce proprio al fatto di non avere né inizio né fine: la proprietà per cui la curva esegue infinite evoluzioni verso e dal suo polo è detta *autosomiglianza*.

Foglio excel:

Osservazione di come può presentarsi in generale una spirale logaritmica, non necessariamente aurea.

[Spiegazione di come è stato possibile tracciare il grafico sul foglio di calcolo e del **perché si chiama logaritmica**:





Per lo studio algebrico della spirale logaritmica si impone che il raggio vettore *r* della curva sia una funzione continua e monotona di un angolo θ. Consideriamo un sistema *xOy* di coordinate polari tali che $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, dove r è la distanza di un punto generico P dall'origine degli assi (considerato come *polo* della spirale), e l'angolo θ indica l'inclinazione di OP rispetto all'*asse polare* (il semiasse positivo delle ascisse).

In questo modo è possibile definire in coordinate polari (θ , *r*) l'equazione della spirale mirabile:

$f(\theta) = r = ab^{\theta}$, essendo *a* e *b* due costanti caratteristiche ($a,b \in \mathbb{R}$), oppure $r = b^{k\theta}$, con *k* costante.

Questo è equivalente a scrivere $b^{\theta} = \frac{r}{a}$. Esplicitando θ , diviene $\theta = \log_b\left(\frac{r}{a}\right)$.

Ecco dunque spiegato l'attributo "*logaritmica*": l'angolo tra il raggio vettore e l'asse polare è proporzionale al logaritmo della lunghezza del vettore stesso.

Variando i due parametri *a* e *b* si possono ottenere diversi tipi di spirali logaritmiche. Il coefficiente *a* modifica le dimensioni della spirale e dunque la rotazione della curva. Il termine *b* controlla in quale direzione essa si avvolge.]

La spirale è stata disegnata già in precedenza a punti, si fa notare che il suo grafico cambia al variare di alcuni parametri.

In natura:

Presenza spirale logaritmica nei fiori: per esempio il girasole presenta la spirale logaritmica all'interno del suo capolino, questa disposizione permette di inserire il maggior numero di semi nel minor spazio possibile. Le spirali che si osservano sono sia in senso orario che in senso antiorario e la cosa stupefacente è che si contano le spirali in senso orario e poi quelle in senso antiorario risulteranno due numeri che sono due termini della successione di Fibonacci.

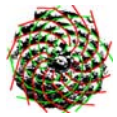
Una disposizione analoga si osserva anche nella margherita dove i boccioli dei singoli fiorellini gialli (all'interno della corolla di sepali bianchi) seguono un andamento a spirale logaritmica per il medesimo motivo illustrato precedentemente. Allo stesso modo il numero di spirali in senso orario e quelle in senso antiorario saranno due termini successivi della successione di Fibonacci.

A spirale logaritmica sono disposti anche i primordi (cellule embrionali vegetali) perché questa disposizione permette loro di accrescersi moltissimo e di occupare in proporzione il minor spazio possibile.

Ancora, la spirale logaritmica, può essere osservata in natura nella disposizione delle foglie sullo stelo di un fiore o sul ramo di un albero: anche in questo caso tale andamento è il migliore poiché permette da un lato un efficiente impaccamento delle foglie (cioè posizionare il maggior numero di

foglie possibile nel minor spazio) e dall'altro la corretta ricezione della luce da parte di tutte le foglie (indispensabile per poter svolgere la fotosintesi clorofilliana).

Chi studia la disposizione di foglie, petali, rami e di altri organi nella piante (fillotassi) può verificare che, la combinazione dei due numeri di spirali per ciascuna specie non è casuale, ma rispecchia molto spesso la serie ben nota dei numeri di Fibonacci.
Le spirali sono, quindi, interpretate dai botanici come la tendenza nelle piante ad ottimizzare l'impaccamento, vantaggioso perché, a parità di spazio, consente di ospitare il massimo numero di unità: il maggior numero di primordi di foglie, fiori e di organi successivi (frutti e semi).



La disposizione a spirale logaritmica si osserva molto bene anche nell'ananas (dove si osservano anche che il numero delle squame esagonali seguendo le varie spirali sono termini della successione di Fibonacci), nelle pigne, nelle piante grasse, nel cavolo romano, e, più in grande, nella forma degli uragani, le galassie [per esempio la Via Lattea, è una galassia *a spirale barrata* di medie dimensioni. Vista dall'alto potrebbe sembrare una girandola con quattro bracci spirali principali (il braccio di Orione, di Perseo, del Cigno e del Sagittario), ciascuno dei quali è una spirale logaritmica] ...

PARTE 5 – conclusione con power point e arte

Osservazione di rapporto aureo e spirali logaritmiche in alcune opere di pittura, fotografia, scultura e architettura.

SITOGRAFIA:

(*)http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Studenti/Ricerche.htm
http://www.math.it/spirale/fibonacci.htm
http://www.math.it/spirale/spirale-log.htm
http://matematica.unibocconi.it/interventi/spirale1.htm
http://www.magiadeinumeri.it/BIOLOGIA.htm
http://www.fibonacci.it/arte.htm
http://www.sectioaurea.com
http://maven.smith.edu/phyllo/EXPO/index.html

BIBLIOGRAFIA:

Carl B. Boyer, Storia della matematica, Mondadori, Milano 2005
C. J. Snijders, "La sezione aurea : arte, natura, matematica, architettura e musica" Testo a stampa (Trad. a cura di Red/studio redazionale), Padova, Muzzio, 1993;
Piergiorgio Odifreddi, Variazioni: un tema aureo, LE SCIENZE, dicembre 2004
Mario Livio, La sezione aurea, Mondadori, Milano 2005